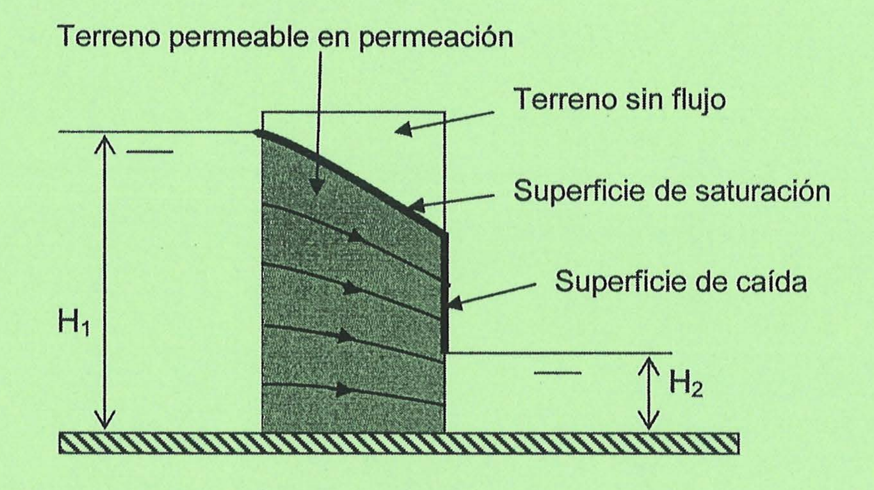
# HIDRÁULICA DEL MEDIO PERMEABLE

## TEORÍA FÍSICO-MATEMÁTICA DE DARCY

*por*

FRANCISCO GONZÁLEZ DE POSADA
MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO
Mª DOLORES REDONDO ALVARADO




**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
***ARQUITECTURA***
***DE MADRID***

**3-12-08**

# HIDRÁULICA DEL MEDIO PERMEABLE

## TEORÍA FÍSICO-MATEMÁTICA DE DARCY

*por*

FRANCISCO GONZÁLEZ DE POSADA
MERCEDES GONZÁLEZ REDONDO
Mª DOLORES REDONDO ALVARADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

**3-12-08**

C U A D E R N O S
D E L  I N S T I T U T O
J U A N  D E  H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área

51 Autor

09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS

2 CONSTRUCCIÓN

3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS

4 TEORÍA

5 GEOMETRÍA Y DIBUJO

6 PROYECTOS

7 URBANISMO

8 RESTAURACIÓN

0 VARIOS

***Hidráulica del medio permeable. Teoría físico-matemática de Darcy.***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 388.01 / 3-12-08
ISBN-13: 978-84-9728-443-1
Depósito Legal: M-37366-2012

# ÍNDICE

# I. EL REFERENTE

1. LOS TERRENOS PERMEABLES
2. EXPERIENCIA SINGULAR: EL PERMEÁMETRO

# 1. LOS TERRENOS PERMEABLES

## 1.1. Consideraciones introductorias

La teoría de Darcy para el estudio del flujo a través de medios permeables, aún vigente con plenitud y casi con exclusividad, tuvo su origen en 1856 en un informe-tratado sobre las fuentes públicas de la ciudad de Dijon (Francia) presentado por el propio Darcy.

Es una teoría físico-matemática que se integra en las denominadas de transporte o de conducción, y pretende estudiar el movimiento (flujo, transporte) de un fluido a través de un medio permeable.

Su estudio es de gran importancia en diversos ámbitos de la ingeniería civil y de la arquitectura tales como la hidráulica subterránea, la hidrogeología, el análisis de subpresiones en obras, la geotecnia, etc.

Característica fundamental: la abstracción que hace esta teoría de Darcy de la naturaleza real del medio, dándole un carácter ficticio formal que permite una interpretación matemática del fenómeno.

## 1.2. Los terrenos permeables

La categoría de terreno permeable abarca, entre otros, los aluviones fluviales o glaciares, las masas de materias sueltas desmoronadas o conglomeradas y los terraplenes artificiales. Todos ellos tienen en común que están recorridos por una red muy compleja de canales intersticiales, como puede intuirse a partir de la fig. 1.1 que representa un corte de un terreno suelto por un plano vertical.

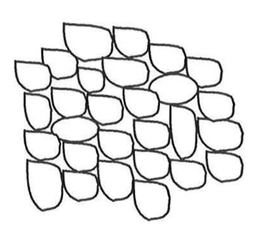


Fig. 1.1. Sección de una estructura real de un suelo de materiales sueltos

El flujo hidráulico a través de un medio permeable tiene lugar realmente a lo largo de estos canalículos o redes intersticiales que existen en el seno del medio. Este **flujo real** a través de la *red canalicular* interior a una estructura sólida tan compleja como un suelo que es extremadamente difícil de conocer y de estudiar.

Estos terrenos, complejos, constituyen el referente principal de la teoría físico-matemática de Darcy que vamos a exponer. También constituyen referentes de la teoría, por ejemplo, los denominados 'tapones porosos', así como todo tipo de material permeable.

# 2. EXPERIENCIA SINGULAR: EL PERMEÁMETRO

## 2.1. El permeámetro: descripción básica

Un permeámetro es un aparato formado por un tubo cilíndrico de vidrio, de plástico, metálico... relleno de arena, u otro material sólido permeable, entre las secciones *A* y *A'* constituidas por dos mallas tales que sus orificios sean de menor tamaño que el diámetro de las partículas que forman el relleno, para impedir su paso.
La longitud del tubo, entre extremos de piezómetros límite es *l*, y su sección, *S*. Está conectado por su parte superior a un depósito y por la inferior a otro provisto de una salida lateral, o de fondo, por la que evacua el caudal constante utilizado en cada experiencia. En la generatriz superior del tubo, a lo largo de su longitud, se instala un número determinado de tubos piezométricos. Su esquema se presenta en la Fig. 2.1

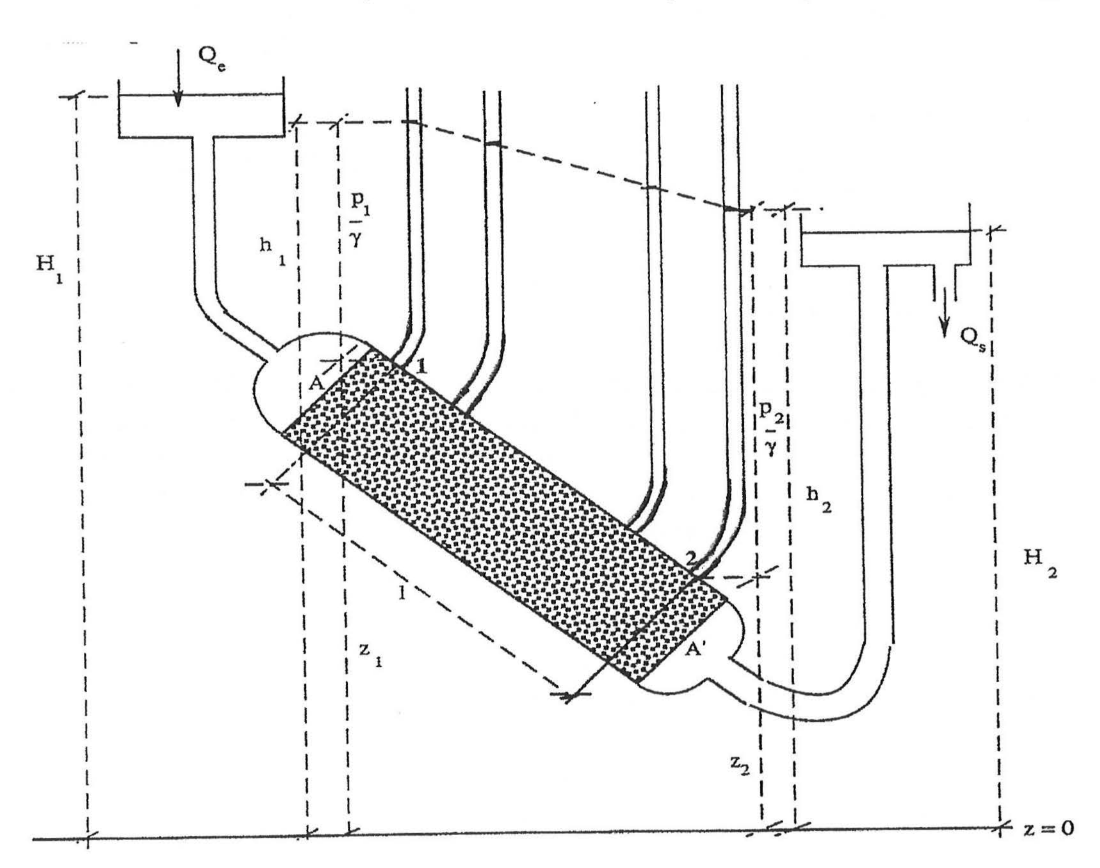



Fig. 2.1. El permeámetro

## 2.2. Experiencia del permeámetro

Por el depósito superior se introduce un caudal de entrada $Q_e$ tal que, alcanzado el régimen permanente, es igual al $Q_s$ que sale por el depósito inferior. Observando los piezómetros se ve que el líquido alcanza una altura determinada en cada uno y

decreciente de uno al siguiente, de forma que sus superficies están alineadas. Se lee la diferencia de alturas $h_1 - h_2$ entre los piezómetros extremos cuyas tomas distan una longitud ***l***.

Esta experiencia se repite para distintos valores de los caudales, siempre en régimen permanente, midiendo las alturas de líquido en los respectivos piezómetros extremos.

Representando gráficamente los resultados de la experiencia, se obtiene una serie de puntos tales que hasta un determinado valor de Q/S, caudales pequeños, están situados en una recta de ecuación:

$$\frac{Q}{S} = tg\alpha \frac{h_1 - h_2}{l} \qquad (2.1)$$

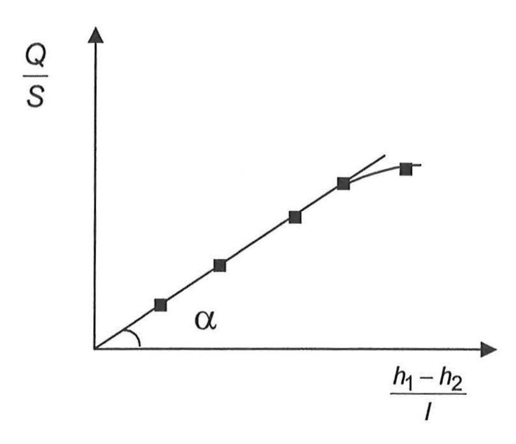



Fig. 2.2. Representación gráfica de los resultados de la experiencia del permeámetro

donde las variables representan:

$Q$ : Caudal de líquido, previamente aforado.

$S = \pi r^2$ : Área de la *sección* del tubo cilíndrico de radio *r* (independiente de la desigual distribución de huecos y partículas sólidas).

$\frac{Q}{S} = v$ : Magnitud ficticia denominada *velocidad de filtración.*

$\frac{h_1 - h_2}{l}$ : Pérdida de energía potencial por unidad de peso y de longitud.

$$\left( E_p = m g h ; \quad h = \frac{E_p}{mg} \right) \qquad (2.2)$$

*tg α* : Pendiente de la recta *experimental* que pasa por el origen del sistema de coordenadas elegido. (Varía para cada material sólido y para cada líquido).

A esta pendiente, *tg α* = *k* , se la denominó ***permeabilidad***, definiéndola como

*capacidad del medio permeable a dejarse atravesar por un fluido*, para después añadirle el adjetivo *relativa*, con objeto de hacer referencia al fluido de que se trate. Actualmente se denomina también ***conductividad hidráulica***, por analogía con los conceptos analógicos de los campos térmico y eléctrico.

### 2.3. Ley unidireccional del flujo

De la experiencia anterior se deduce:

$$v = k\frac{h_1 - h_2}{l} \tag{2.3}$$

Que es la *ley experimental del permeámetro*, que puede considerarse como *ley unidireccional de Darcy*, y que puede expresarse en forma diferencial, de la manera siguiente:

$$\boxed{v = -k\frac{dh}{ds}} \tag{2.4}$$

En la clásica ecuación de Bernoulli de la Hidráulica ordinaria

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \tag{2.5}$$

donde:

$H$: *Potencial hidráulico* (energía total por unidad de peso)

$z$: *Altura geométrica* sobre un plano de referencia

$z + \frac{p}{\gamma} = h$: *Altura piezométrica* (es decir, altura que alcanzaría el fluido en un tubo piezométrico conectado al punto objeto de estudio)

$\frac{v^2}{2g}$: *Altura cinética* (es decir, la altura debida a la *velocidad* del fluido)

En los casos considerados como de filtración en medios permeables, las velocidades son de órdenes de valor inferior a 1 cm/s; por ello, en ingeniería civil y arquitectura la altura cinética es despreciable teniendo que:

$$H \equiv h = z + \frac{p}{\gamma} \tag{2.6}$$

Por tanto, resulta equivalente utilizar los términos *potencial hidráulico* (o *carga hidráulica*) y *altura piezométrica*.

# II. TEORÍA FÍSICO-MATEMÁTICA DE DARCY

# 3. MAGNITUDES FÍSICAS

## 3.1. Hipótesis básica

*El flujo hidráulico* a través de un medio permeable tiene lugar realmente a lo largo de estos canalículos o redes intersticiales que existen en el seno del medio. Este flujo real es extremadamente difícil de conocer y de estudiar. De aquí la importancia del modelo denominado *teoría generalizada de Darcy,* **modelo teórico,** que sustituye el sólido y el flujo a través de su red intersticial por un *flujo ficticio de un hipotético fluido que ocupase todo el recinto correspondiente a sólido y red de canalículos*, mediante la consideración de unos valores medios correspondientes a cada punto en todo el recinto, definidos por unas funciones diferenciables de la clase $C^n$ , ($n \geq 2$).

Son mucho los análisis realizados de las estructuras sólidas y redes canaliculares de estos terrenos, y variados los índices, fórmulas y relaciones que intentan definirlos. Sin embargo, como la única propiedad del medio que nos interesa es su comportamiento respecto de la filtración, sólo lo estudiaremos desde esta perspectiva.

## 3.2. Hipótesis relativas al medio sólido

a) *Continuidad*

En términos reales el medio permeable es *poroso* pero no como una esponja sino de tal forma que el agua se encuentra con canalículos en unos puntos y en otros con partículas unidas que no puede atravesar (distribución de huecos y partículas sólidas absolutamente irregular). A pesar de esta configuración real, se acepta la hipótesis de medio continuo que ofrece una resistencia, expresada mediante funciones continuas, al paso de un fluido a través de él.

b) *Homogeneidad*

La noción de homogeneidad del terreno respecto de la filtración se considera una hipótesis formal, para establecer la teoría de forma más sencilla. Un terreno permeable, o una región de él, es homogéneo, cuando presenta en todos los puntos respecto de una dirección determinada arbitraria, la misma resistencia al flujo del fluido.

En la realidad esta hipótesis sólo puede considerarse aproximada, usando escalas de homogeneidad macroscópicas, pero el concepto se utiliza con aplicación infinitesimal. Los estudios de hidráulica subterránea están, por tanto, subordinados a la hipótesis de homogeneidad. Cuanto más homogéneo sea el terreno, mayor será, de ordinario, el acuerdo de su comportamiento real con la teoría.

c) *Estabilidad* (en el tiempo) *física y química*

Las propiedades mecánicas y químicas del medio no se alteran a lo largo del tiempo, permaneciendo constantes durante los procesos de filtración, de modo que no se modifican los valores de la conductividad hidráulica.

d) *Isotropía y anisotropía*

Se considera que un terreno es isótropo cuando la resistencia que opone al movimiento del fluido es idéntica en todas las direcciones.

Terreno anisótropo es aquél en el que la resistencia al movimiento del fluido varía según la dirección considerada. Por la génesis y desarrollo de los distintos terrenos se observa que en la realidad todos son anisótropos.

### 3.3. Hipótesis relativas al fluido

a) *Incompresibilidad.* En el caso de los líquidos (densidad, ρ, constante a lo largo del tiempo y en todos los puntos).

*Compresibilidad.* En el caso de los gases.

b) *Estabilidad física y química.* El fluido no ataca al medio ni es influido por éste.

### 3.4. Esquema general de las magnitudes físicas específicas de la teoría

La expresión matemática unidireccional diferencial de la ley de Darcy (deducida de la experiencia del permeámetro, de la forma:

$$v = -k\,\frac{dh}{ds} \qquad (3.1)$$

facilita el análisis conceptual inicial.

A la luz del *principio de causalidad*:




se aprecia que existe una *causa:* la diferencia de potencial hidráulico, *h*; en un *medio* (cuya presencia respecto de la filtración se representa por su propiedad característica, *k* –conductividad hidráulica o permeabilidad relativa-), causa que produce un *efecto*: la filtración (expresada por la velocidad de filtración, *v*). El signo – de la fórmula indica que la filtración se produce en el sentido del potencial hidráulico decreciente. Analizaremos con cierto detalle el significado físico de las magnitudes que integran la ley de Darcy.

## 3.5. La causa del flujo: el potencial hidráulico

En cada punto del *medio continuo ficticio* (conjunto sólido - fluido), el potencial hidráulico ***h*** representa la energía de la unidad de peso del fluido. Esta energía depende del punto y del instante considerado.

La *causa* de que exista filtración a través del medio permeable es la *diferencia de potencial hidráulico* de unos puntos a otros, representada por el campo vectorial de los $\overrightarrow{grad}\, h$, que tiene también una distribución espacio - temporal. El potencial hidráulico, también denominado *carga hidráulica*, es un campo escalar o función escalar de la clase diferencial $C^2$, tal que en una referencia cartesiana triortonormal, $(0, x, y, z)$ puede expresarse de la forma $h(x, y, z, t)$.

La variación espacial de *h* se define mediante el campo vectorial $\overrightarrow{grad}\, h$, cuya expresión, siendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los versores de las direcciones *x,y,z,* respectivamente, es de la forma:

$$\overrightarrow{grad}\, h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.2)$$

El vector $\overrightarrow{grad}\, h$ es, en cada punto, perpendicular a la superficie de nivel de *h* (superficies equipotenciales o de carga constante) que pasa por el punto.

## 3.6. El medio: la conductividad hidráulica o permeabilidad relativa

Conductividad hidráulica es la propiedad característica del terreno que representa la cualidad de dejarse atravesar por un fluido real (también denominada permeabilidad relativa de un medio respecto de un fluido).

Como *constante característica* de un medio conductor en la ley de Darcy, del medio permeable, tiene naturaleza algebraica tensorial real de segundo orden simétrico. En general, será una función de punto y del tiempo: $\kappa(P, t, \vec{n})$

Sus componentes escalares en un sistema cartesiano de referencia ortonormal son también, funciones de punto y del tiempo y pueden expresarse matricialmente de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}(x,y,z,t) & k_{12}(x,y,z,t) & k_{13}(x,y,z,t) \\ k_{21}(x,y,z,t) & k_{22}(x,y,z,t) & k_{23}(x,y,z,t) \\ k_{31}(x,y,z,t) & k_{32}(x,y,z,t) & k_{33}(x,y,z,t) \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

La aceptación de la hipótesis de homogeneidad, aplicada a cada recinto de material permeable de una naturaleza dada, hace que las componentes no sean funciones de punto.

Las hipótesis de estabilidad del medio permeable, fluido incompresible y estable (y, también, usualmente régimen permanente), hacen que las componentes del tensor conductividad hidráulica sean independientes del tiempo. Por tanto:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Según el teorema de diagonalización de matrices simétricas reales puede escribirse la matriz asociada, respecto del sistema principal de referencia cartesiano

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

En el caso de medios isótropos, la matriz K asociada a k se reduce a

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

### 3.7. El efecto: la velocidad de filtración

El gradiente de potencial hidráulico en un medio permeable produce el efecto de la filtración a través de dicho medio, efecto que suele expresarse por la velocidad de filtración o caudal específico. Esta velocidad es un concepto ficticio, distinta de la velocidad media del fluido y, diferente, también, de la velocidad real de las moléculas del líquido. Es un campo vectorial $\vec{v}(P,t)$ que representa el campo ficticio de velocidades del flujo originado por la distribución de la carga hidráulica correspondiente. Unidireccionalmente tiene la expresión:

$$v = \frac{Q}{S} \tag{3.7}$$

*Q*: caudal que atraviesa la sección total *S* del medio permeable (estructura sólida más huecos)
*S*: área de dicha sección

El flujo siempre circula en el sentido de los potenciales hidráulicos decrecientes.

# 4. LEY DE DARCY GENERALIZADA

## 4.1 Ley generalizada de Darcy

La ley de Darcy en recintos espaciales tridimensionales se expresa:

$$\vec{v} = -\kappa \; \overrightarrow{grad} \; h \qquad (4.1)$$

En la que todas las variables son funciones de punto y del tiempo: *h*, campo escalar, $\vec{V}$, campo vectorial; $\kappa$, campo tensorial de segundo orden.

## 4.2. Expresiones generales de la ley de Darcy

En el caso de terrenos supuestos *isótropos* y respecto de un sistema de referencia cartesiano, dicha ecuación puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

En terrenos *anisótropos*, respecto a un sistema de referencia principal, la ecuación (4.1) puede expresarse matricialmente de la forma:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

## 4.3. Significado físico de la ley de Darcy

El significado físico de la ley de Darcy puede caracterizarse mediante las siguientes consideraciones:

a) El movimiento de un fluido a través de un medio permeable pone en juego

importantes fuerzas de rozamiento.

b) El trabajo de estas fuerzas se manifiesta como pérdida irreversible de energía (disipación de calor, deterioro físico del medio).
c) La carga hidráulica o potencial hidráulico, decrece a lo largo del movimiento.
d) La ley de Darcy es una expresión de la "pérdida de carga" que depende "linealmente" de la velocidad de filtración.

## 4.4. Ámbito de validez

En los terrenos sueltos es útil casi siempre. Se ha comprobado experimentalmente que la ley de Darcy es una excelente aproximación en el dominio de los números de Reynolds pequeños.

En Hidráulica del medio permeable se define como Número de Reynolds el parámetro adimensional:

$$\Re = \frac{vd}{\mu/\rho}$$

donde $v$ representa la velocidad del flujo, $d$ una longitud característica del medio (diámetro de las partículas sueltas en terrenos no consolidados); $\mu$, viscosidad dinámica del fluido; $\rho$, densidad del fluido. Su significado es análogo al Número de Reynolds de la Hidráulica: relación entre fuerzas de inercia y fuerzas viscosas.

Hasta valores de $\Re$ del orden de 10 la ley de Darcy es perfectamente válida. Dado que en la mayor parte de los terrenos los valores de $\Re$ son mucho menores de 10 esta teoría física se ha impuesto para el estudio de los problemas de filtración. En el caso de terrenos artificiales, como los diques, cuya misión es garantizar altos grados de impermeabilidad (bajísimos Números de Reynolds) la Hidráulica del medio permeable de Darcy es de extraordinaria calidad.

# CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE RECINTO

## 5.1. Ecuaciones de recinto en medios homogéneos y estables y en régimen permanente

Ley fundamental de la teoría Hidráulica del medio permeable es la que hemos denominado *Ley de Darcy generalizada:*

$$\vec{v} = -\kappa\, \overrightarrow{grad}\, h \tag{5.1}$$

De acuerdo con esta ley el problema teórico consiste en conocer la ecuación que debe satisfacer el potencial hidráulico *h* en el dominio del flujo, y, a partir de ella deducir las características del flujo.

Para nuestro estudio posterior se van a considerar las hipótesis simplificativas siguientes:

- Régimen permanente: $h(x, y, z)$
- Fluido incomprensible: $\rho = \text{cte}$
- Medio permeable estable y sin generaciones ni succiones de flujo

## 5.2. Medio isótropo

En el caso de medio isótropo la conductividad hidráulica se puede considerar "como si fuera" un escalar (campo escalar constante) y la ley generalizada de Darcy se expresa de la forma:

$$\vec{v} = -k\, \overrightarrow{grad}\, h \tag{5.2}$$

Expresando esta ecuación vectorial mediante las correspondientes escalares resultan:

$$v_x = -k\frac{\partial h}{\partial x};\quad v_y = -k\frac{\partial h}{\partial y};\quad v_z = -k\frac{\partial h}{\partial z} \tag{5.3}$$

En la aceptación de la hipótesis usual de la hidráulica ordinaria de continuidad extendida a la velocidad de filtración, resulta:

$$div\, \vec{v} = 0 \tag{5.4}$$

Sustituyendo $\vec{v}$, según (5.2), se obtiene:

$$div\, \vec{v} = div\,(-k \cdot \overrightarrow{grad}\, h) = -k \cdot div\,(\overrightarrow{grad}\, h) = -k \cdot \Delta h = 0$$

Es decir,

$$\Delta h = 0 \qquad (5.5)$$

Por tanto, $h$ verifica la ecuación de Laplace y la carga hidráulica es un potencial armónico o potencial armónico.

En un sistema cartesiano triortonormal la ecuación (5.5) se expresa de la forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad (5.6)$$

Y en el caso de flujo bidimensional según una dirección plana $(x,y)$, análogamente, de la forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (5.7)$$

En el caso de terreno isótropo la distribución de la carga hidráulica no depende de $k$ sino exclusivamente de la forma geométrica del dominio del flujo y de las condiciones en los límites del dominio, por lo que no aparece $k$ en la ecuación de Laplace. No obstante, el flujo, cantidad de fluido que atraviesa el medio por unidad de tiempo, sí es proporcional a $k$.

## 5.3. Medio anisótropo

Desarrollando la ecuación matricial (4.3) referida a los ejes principales de la conductividad hidráulica, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Si en la ecuación de continuidad, $div\,\vec{v} = 0$, que puede escribirse de forma desarrollada:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

sustituimos estos valores de (5.4), se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial\left(-k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-k_z \frac{\partial h}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0$$

deduciéndose, como ecuación general del flujo en un recinto permeable en el ámbito de las hipótesis simplificativas aceptadas, la siguiente:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad (5.9)$$

dado que , $k_x$, $k_y$, $k_z$ son constantes por la hipótesis de homogeneidad.

La función $h$ no es, en este caso, función armónica. Los valores de $h$ en el dominio permeable sí dependen de las componentes de la conductividad hidráulica (de hecho, de sus relaciones).

## 5.4. Flujo isótropo correspondiente a uno anisótropo

Mediante una transformación de coordenadas es posible considerar el flujo a través de un medio anisótropo como si fuera isótropo, creando un nuevo flujo ficticio que se denomina *flujo isótropo correspondiente al anisótropo.*

Si en la ecuación general obtenida para un medio anisótropo:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

se realiza el cambio de coordenadas definido por:

$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_x}}\, x$$

$$y' = \sqrt{\frac{k}{k_y}}\, y$$

$$z' = \sqrt{\frac{k}{k_z}}\, z$$

donde $k$ es un coeficiente, de valor cualquiera, con dimensiones de permeabilidad relativa, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'}\sqrt{\frac{k}{k_x}}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial h}{\partial x'}\sqrt{\frac{k}{k_x}}\right)\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2}\sqrt{\frac{k}{k_x}}\sqrt{\frac{k}{k_x}}=\frac{k}{k_x}\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{k}{k_y}\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2} \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\frac{k}{k_z}\frac{\partial^2 h}{\partial z'^2}$$

Sustituyendo en la ecuación general,

$$k_x\frac{k}{k_x}\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2}+k_y\frac{k}{k_y}\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2}+k_z\frac{k}{k_z}\frac{\partial^2 h}{\partial z'^2}=0$$

Simplificando y sacando factor común $k$,

$$k\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z'^2}\right)=0$$

Es decir

$$\boxed{\Delta h=0} \qquad (5.10)$$

*Los problemas de filtración en régimen permanente a través de un medio permeable continuo y homogéneo sin generaciones ni succiones interiores de flujo, se reducen a la resolución de una función armónica en un recinto sometido a unas determinadas condiciones de contorno.*

## 5.5. Resumen de las hipótesis generales utilizadas por la teoría físico-matemática de Darcy que conducen a la ecuación de Laplace

La filtración de un líquido a través de un medio permeable se estudia en el marco de las hipótesis simplificativas de la teoría físico-matemática de Darcy. En concreto, se han destacado, esquemáticamente, las siguientes hipótesis:

a) *Medio ficticio conjunto continuo.*

$$\kappa=\kappa(P,t,\vec{n})$$

b) *Medio homogéneo* respecto de la filtración; es decir, el campo tensorial conductividad hidráulica del medio (o permeabilidad relativa) no es función de punto sino sólo de la dirección y del tiempo.

$$\kappa=\kappa(t,\vec{n})$$

c) La estructura físico-geométrica del material permeable y las características específicas del fluido permanecen *estables*; es decir, el campo tensorial conductividad hidráulica no depende del tiempo. Por tanto:

$$\kappa = \kappa(\vec{n})$$

d) La filtración se realiza en *régimen permanente;* es decir, se estudia con niveles constantes de agua en las superficies filtrantes, y, por tanto, el potencial hidráulico (carga hidráulica o altura piezométrica) en el recinto objeto de estudio sólo es función de punto:

$$h = h(x,y,z)$$

e) El flujo tiene lugar según un régimen contenido en el dominio de *validez de la ley de Darcy:*

$$\vec{v} = -k\ \overrightarrow{grad}\ h$$

f) El fluido es *incompresible*

$$\rho(P,t) = 0$$

g) *El campo de las velocidades de filtración se supone solenoidal*; es decir

$$div\ \vec{v} = 0$$

h) El potencial hidráulico se supone de la clase $C^2$ y en la hipótesis de medio permeable isótropo (*k=cte*, en todas direcciones) *es un campo escalar armónico*:

$$\Delta h = 0$$

i) En medio permeable anisótropo, realizando la transformación lineal que aplica el medio anisótropo en su medio isótropo correspondiente, el potencial hidráulico también verifica la ecuación de Laplace:

$$\Delta h = 0$$

j) En las superficies libres se prescinde de los efectos capilares debidos a la tensión superficial y de las humedades. Interesa sólo la filtración, el flujo.

*Los problemas de filtración se reducen a la resolución de una función armónica en un recinto sometido a unas determinadas condiciones de contorno.*

# 6. CONDICIONES DE CONTORNO

## A) CONSIDERACIONES DE TEORIA DEL POTENCIAL

### 6.1. Condiciones teóricas de contorno

En la *teoría del potencial* se consideran básicamente tres tipos de problemas de contorno que se presentan en la resolución de una *función armónica* $U$ y se enuncian a continuación, en síntesis:

a) *Problema de Dirichlet*: consiste en determinar los valores de $U$ en el recinto a partir del conocimiento de los valores de U en el contorno.

b) *Problema de Neumann*: consiste en determinar los valores de $U$ en el recinto a partir de los valores de $\frac{\partial U}{\partial n}$ en el contorno.

c) *Problema mixto*: consiste en determinar los valores de $U$ en el recinto a partir de los valores de $U$ y de $\frac{\partial U}{\partial n}$ que verifican en el contorno $S$ la condición:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + f\,U = g \qquad (6.1)$$

Siendo $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ funciones continuas en $S$, $f \geq 0, g \neq 0$.

Estos tipos de condiciones son los que se presentan en las superficies de contorno de los estudios de filtración a través de un medio permeable en carga o con superficie libre.

## B) SUPERFICIES DE CONTORNO ORDINARIAS EN LOS MEDIOS PERMEABLES

### 6.2. Superficies filtrantes

Superficies filtrantes o superficies de filtración son aquellas superficies que están en contacto directo y completo con una masa de agua libre. En ésta las pérdidas de carga son despreciables, de tal modo que el potencial hidráulico en la superficie filtrante es constante. La condición analítica en estas superficies es de la forma:

$$h = cte \qquad (6.2)$$

Es una condición tipo Dirichlet. Por tanto, *las superficies filtrantes son superficies equipotenciales*.

Ejemplo1. **Fondo horizontal no impermeabilizado de un estanque limitado por un muro impermeable.**

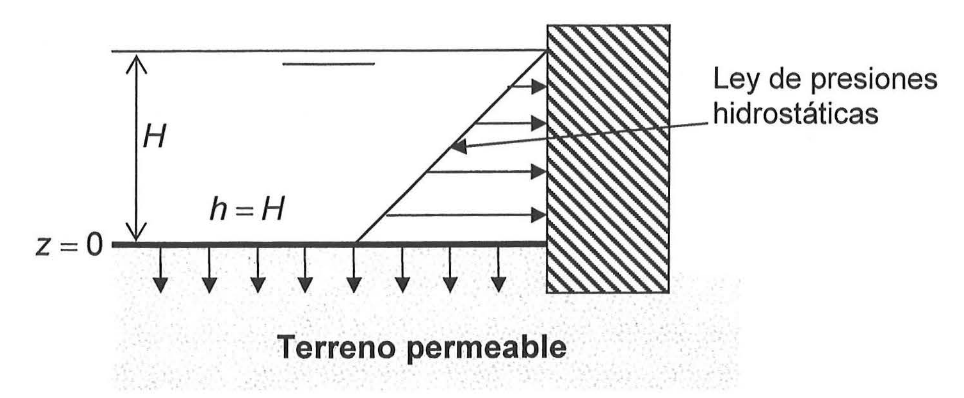



Fig. 6.1. Ejemplo de superficie filtrante: fondo de un estanque no impermeabilizado

En la figura 6.1. se representan:

a) El muro impermeable y el agua estancada con una altura H sobre el fondo
b) La superficie filtrante –destacada- sobre la que actúa la condición de contorno h=H (altura de agua en el estanque) si se utiliza como plano de referencia de niveles, z=0, la propia superficie filtrante.
c) La ley de presiones hidrostática contra el muro.
d) Los orígenes (mediante flechitas) de las líneas de flujo, que son perpendiculares a la superficie filtrante.

Ejemplo 2. **Paramento interior de una presa de materiales sueltos y solera del embalse** (no impermeabilizados).

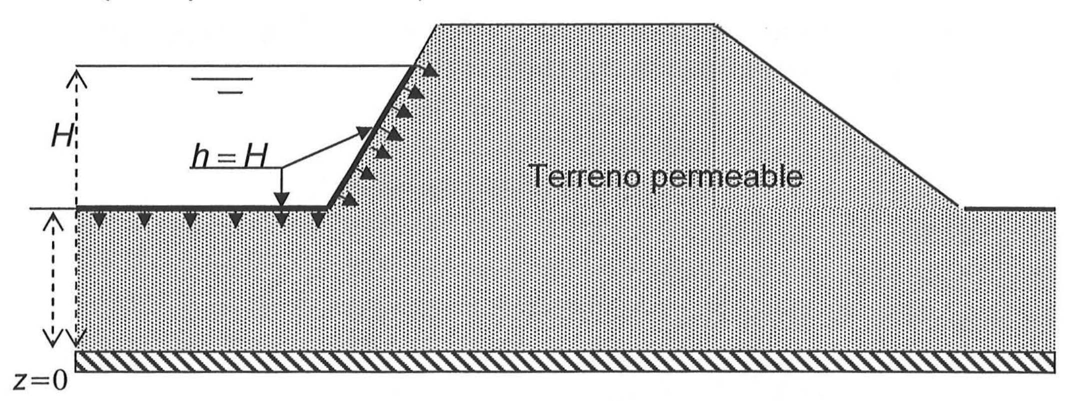



Fig. 6.2. Ejemplo de superficie filtrante: paramento interior de una presa de materiales sueltos y solera del embalse, no impermeabilizados

En la figura 6.2. se representan:

a) El perfil de la presa y del suelo, supuestos constituidos de un mismo material suelto.
b) El nivel de agua embalsada, de altura *H* sobre un nivel de referencias de altura, *z*=0.
c) La superficie filtrante –destacada- con la condición de contorno correspondiente,

$h$=$H$:

$$h = \frac{p}{\gamma} + z = H$$

A medida que se desciende por el paramento interior de la presa, aumenta $z$ y disminuye $p/\gamma$ en la misma medida, siendo $h$=$H$, constante en toda la superficie.

d) Los orígenes de las líneas de flujo o de corriente, que son perpendiculares a la superficie de filtración.

## 6.3. Superficies impermeables

Se consideran superficies impermeables todas las superficies de contacto del terreno permeable con otros terrenos relativamente impermeables respecto de él o con paredes prácticamente estancas; unas y otras se consideran completamente impermeables al flujo. La impermeabilidad se concreta en el hecho de que dichas superficies no son atravesadas por ningún caudal.

En un medio isótropo la condición analítica puede expresarse de la forma:

$$\vec{v}.\vec{n} = v_n = -k\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \qquad (6.3)$$

Es una condición de tipo Neumann, e implica que las superficies equipotenciales ($h = cte$) son normales a las superficies impermeables que se constituyen en superficies de corriente. Estas afirmaciones son válidas sólo para terrenos isótropos o *isótropos correspondientes* a un medio anisótropo, pero no para éste en sí mismo considerado.

Ejemplo: **Filtración bajo un muro de hormigón (impermeable) a través de un estrato permeable que descansa sobre otro impermeable.**

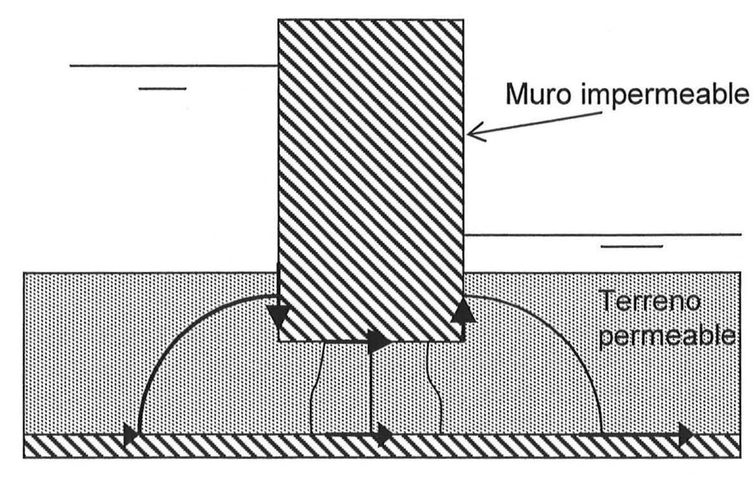



Fig. 6.3. Ejemplo de superficies impermeables: cimiento del muro y límite superior de un estrato inferior impermeable

En la figura 6.3. se representan:

a) Una sección con muro, nivel de agua y suelo permeable que descansa sobre un estrato impermeable.
b) Las líneas de corriente 'adheridas' a las propias superficies impermeables.
c) Unas superficies equipotenciales cuyos contactos con las superficies impermeables son perpendiculares a éstas.

### 6.4. Superficies libres

Una superficie libre limita el flujo por su parte superior (capa freática, superficie de saturación en presas o diques de materiales sueltos).
La posible presencia de superficies libres caracteriza y singulariza a esta clase de fenómenos de transporte en el conjunto de las teorías de tipo Fourier. No todo el terreno permeable está en permeación: una parte superior puede estar libre de flujo (seco, salvo posibles humedades o ascensiones capilares, líquido estático, que no fluye).

En régimen permanente, la superficie libre, estable, es superficie de corriente (no está atravesada por ningún caudal) y cumplirá la condición:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \tag{6.3}$$

Además, esta superficie libre está sometida a la presión atmosférica ($p_{man}=0$), y, por tanto:

$$h = H = \frac{p}{\gamma} + z = z \tag{6.4}$$

En resumen, en la superficie libre existen dos condiciones simultáneas:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0; \quad h = z \tag{6.5}$$

La coexistencia de dos condiciones sobre estos contornos no está en contradicción con los teoremas de unicidad de las funciones armónicas, ya que un problema previo consiste en determinar de modo preciso el propio contorno. Aquí radica el principal inconveniente teórico de la Hidráulica del medio permeable respecto de las restantes teorías físicas de transporte de tipo Fourier, tales como la conducción del calor en un recinto sólido o la conducción eléctrica en un medio continuo. El agua no fluye necesariamente por todo el terreno permeable como el calor o la electricidad por todo el medio conductor; en el caso de la hidráulica del medio permeable hay que determinar primero el recinto inundado *–recinto en permeación-* y, sólo a éste, aplicarle la teoría.

Una vez determinado el contorno problema –línea se saturación o superficie libre- del problema que exige consideración simultanea de dos condiciones, esta parte del contorno goza de la característica formal de comportarse como si fuera impermeable y puede ser tratado, por tanto, como tal.

Ejemplo: Superficie de saturación en una presa de materiales sueltos.

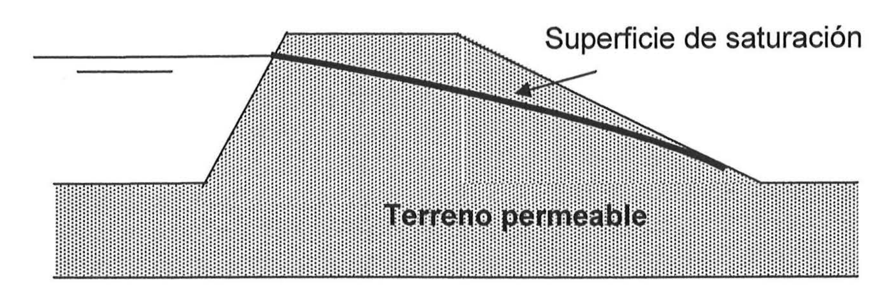



Fig. 6.4. Ejemplo de superficie libre: superficie de saturación en una presa de materiales sueltos

En la figura 6.4 se representan:

a) Una sección transversal de una presa homogénea de materiales sueltos, son agua embalsada.
b) La línea de saturación –destacada- (línea en la sección, es una superficie interior a la presa), que es una superficie libre. El recinto en permeación es el recinto permeable situado por debajo de la superficie de saturación.

## 6.5. Superficies de escorrentía o caída

Superficies de caída o de escorrentía son aquellas superficies de contorno de un recinto permeable por las que el líquido sale libremente a la atmósfera. En ellas, en contacto con la atmósfera, se verifica la condición $p$ = 0 (presión manométrica), y la única condición analítica, por tanto, es:

$$h = z \qquad (6.6)$$

Ejemplo: superficie de salida de la filtración a través de un dique permeable de paredes verticales.

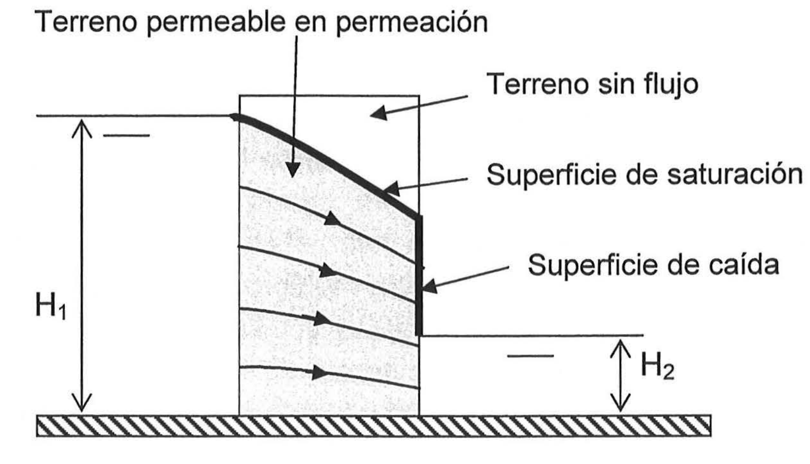



Fig. 6.5. Ejemplo de superficie de caída: filtración a través de un dique permeable de paredes verticales.

# 7. SUBPRESIONES: EMPUJES Y LEVANTAMIENTOS

## 7.1. Ley de subpresiones

Se denomina *subpresión* a la presión que ejerce un fluido (frecuentemente agua subterránea o filtrada) sobre una obra (presa, muro, solera, etc.) cimentada en un terreno permeable.

En la expresión simplificada del trinomio de Bernoulli:

$$h = \frac{p}{\gamma} + z \qquad (7.1)$$

referida a una obra determinada, $z$ se conoce en los contornos de la obra (geometría) respecto del plano horizontal de referencia considerado. Supuesta obtenida la función $h$ a lo largo del contorno impermeable de la obra (por ejemplo, mediante simulación analógica o cálculo numérico) puede deducirse fácilmente

$$\frac{p}{\gamma} = h - z \qquad (7.2)$$

en metros de altura de columna de agua, y dado que $\gamma_{agua} = 1\ T/m^3$, resulta:

$$p = [h(m) - z(m)]\ \gamma_{agua}\left(T/_{m^3}\right) = (h - z)\left(T/_{m^2}\right) \qquad (7.3)$$

presión sobre la atmosférica (utilizada como cero de referencia de presiones).

## 7.2. Empujes y levantamientos

Estas subpresiones dan origen a unas fuerzas de empuje y de levantamiento que han de considerarse en los proyectos estructurales de las referidas obras.

Como ejemplo interesante puede considerarse la acción del agua subterránea sobre un muro impermeable cimentado en un lecho permeable con diferentes niveles de agua en ambos paramentos. En la Fig. 7.1. se consideran:

a) Sección transversal del muro con los niveles de agua en los paramentos sobre un lecho permeable.
b) Leyes de presiones hidrostáticas sobre ambos paramentos.
c) Empujes laterales debidos a la subpresión.
d) Empujes ascendentes –levantamientos- debidos a la subpresión.

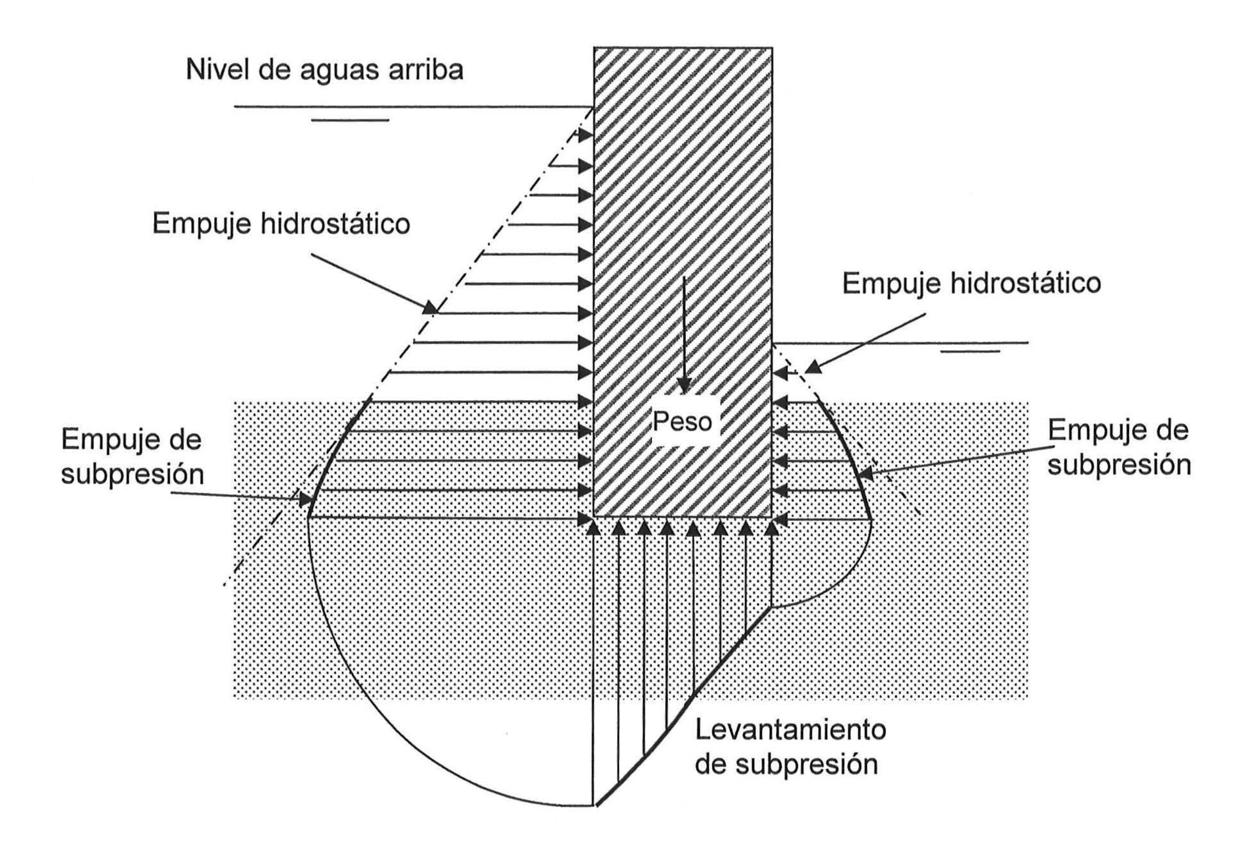



Fig. 7.1. Efectos de empuje y levantamiento creados por la subpresión

# III. APLICACIONES

8. FLUJOS EN CARGA
9. FLUJOS CON SUPERFICIE LIBRE
10. DRENAJES

# 8. FLUJOS EN CARGA

Conocida la ecuación que satisface el potencial hidráulico en el recinto permeable en permeación, $\Delta h = 0$, para obtener $h$ es preciso conocer las condiciones de contorno en cada caso.
Al estudio de esto se dedica el capítulo III. Definir cada problema de filtración consiste en:
1º. Determinar el contorno del recinto permeable en permeación en el que se verifica la ecuación de Laplace.
2º. Establecer las condiciones sobre el contorno de dicho recinto.

## 8.1. Introducción general

De denomina *flujo en carga* a todo aquel flujo que tiene lugar *sin superficie libre*; es decir, tal que en todo el contorno tiene presiones superiores a la atmosférica. Se denomina también *flujo confinado*.

En los flujos en carga todo el terreno permeable está en permeación.

## 8.2. El permeámetro

a) *Recinto permeable en permeación.*

Sea el permeámetro de la Fig. 8.1. descrito en 2.1. El recinto permeable es todo el material suelto introducido en el cilindro del permeámetro ya que no se presentan superficies libres y el flujo queda confinado por la superficie lateral del permeámetro.

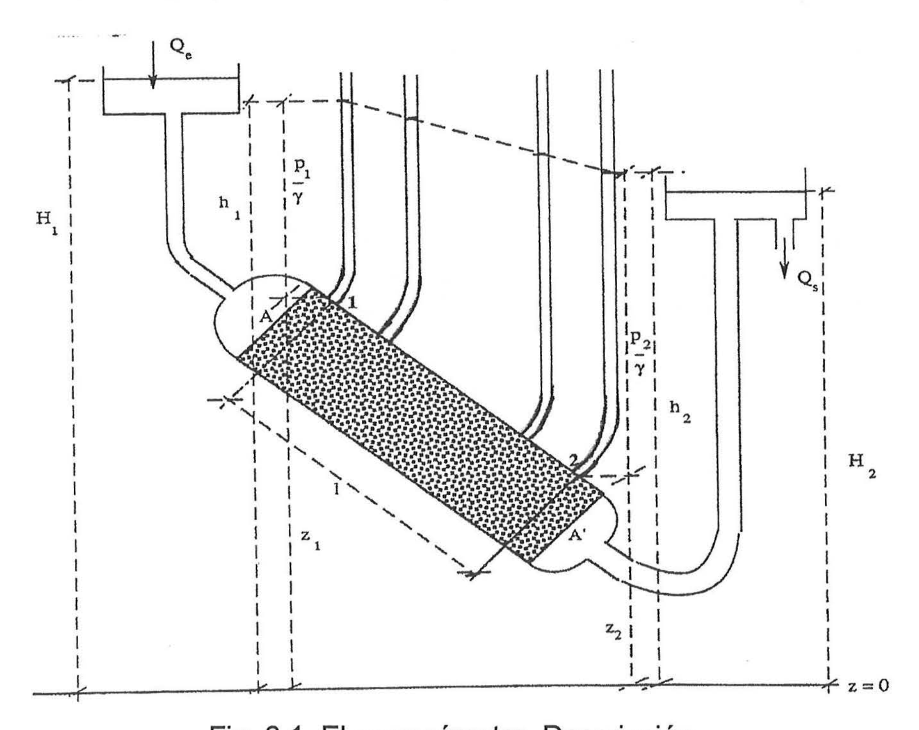



Fig. 8.1. El permeámetro. Descripción

b) *Condiciones de contorno.*

En la Fig. 8.2. se indican las superficies del contorno del recinto permeable

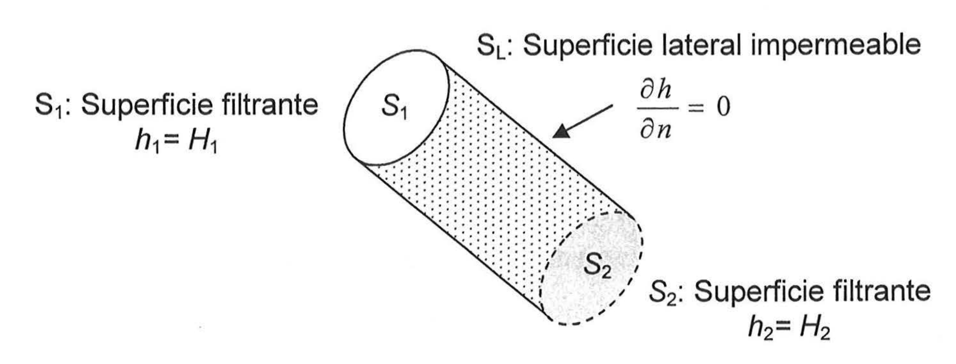



Fig. 8.2. El permeámetro. Condiciones de contorno

Las superficies $S_1$ y $S_2$ de entrada del flujo al recinto permeable y de salida del mismo, respectivamente, son superficies filtrantes ya que están en contacto con masas continuas de agua. En ellas el potencial hidráulico toma los valores respectivos de:

$h_1 = H_1$ = altura depósito 1
$h_2 = H_2$ = altura depósito 2

La superficie lateral del cilindro, $S_L$, envoltura impermeable, no deja pasar el flujo a través de ella; por tanto, la condición analítica de contorno es:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

Y en consecuencia, la superficie lateral del cilindro es una superficie de corriente que guía el flujo.

*c) Red de corriente.*

En la Fig. 8.3. se representa esquemáticamente, en la sección axial vertical, la red de corriente del problema, indicando las superficies equipotenciales del 100, 75, 50, 25 y 0%, respectivamente, de diferencias de potencial respecto del mínimo ($H_2$).

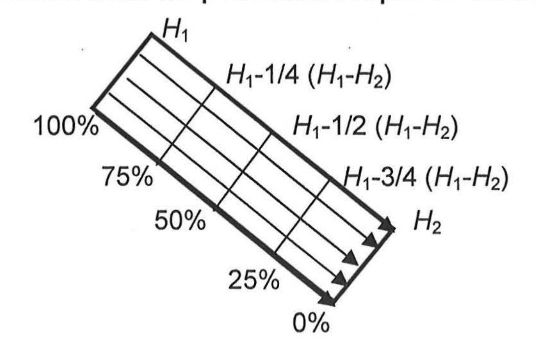



Fig. 8.3. EL permeámetro. Red de corriente

## 8.3. Filtración bajo una presa o muro de gravedad

Se considera el caso descrito en la Fig. 8.4.

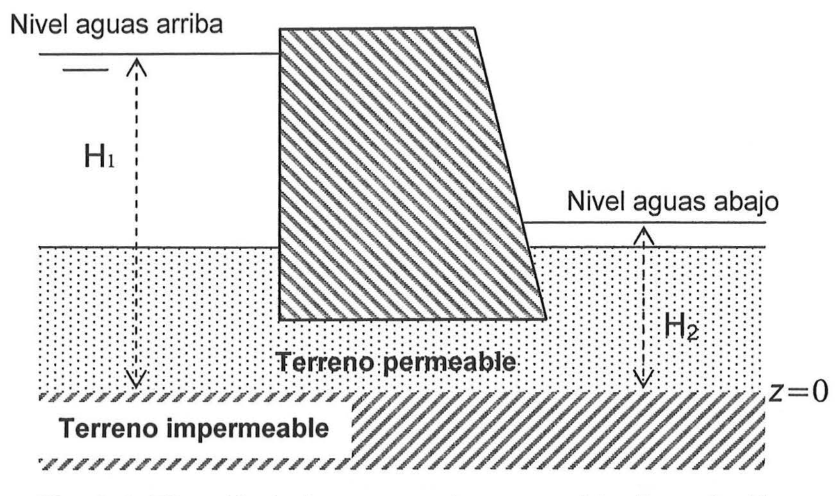



Fig. 8.4. Filtración bajo un muro impermeable. Descripción.

a) *Recinto permeable en permeación.*

El recinto permeable –simbolizado con la usual trama de puntos- está confinado por completo entre los elementos impermeables, como consecuencia de la existencia de masas de agua en los dos paramentos del muro.

*b) Condiciones de contorno.*

Se presentan dos tipos de superficie.

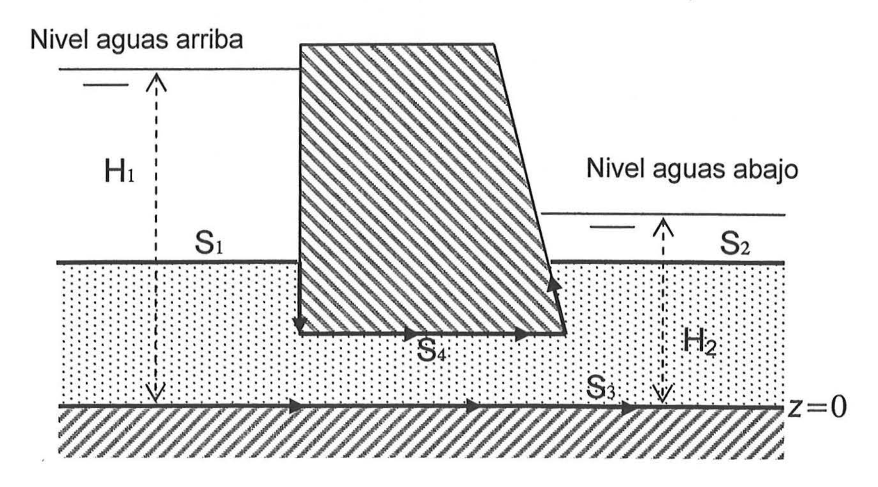



Fig. 8.5. Filtración bajo un macizo impermeable. Condiciones de contorno

$S_1$ y $S_2$ son superficies filtrantes de potenciales hidráulicos $h$ = $\mathbf{H_1}$ y $h$ = $\boldsymbol{H_2}$, respectivamente, respecto del nivel de referencia, $z$ = 0, elegido.

$S_3$ (lecho impermeable) y $S_4$ (base cimentada del muro) son superficies impermeables y, por tanto, en ellas se verifica la condición: $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ y se constituyen en superficies de corriente.

El problema físico-matemático se presenta según la Fig. 8.6. donde se cierran los laterales extremos, por ejemplo, continuando la línea de corriente.

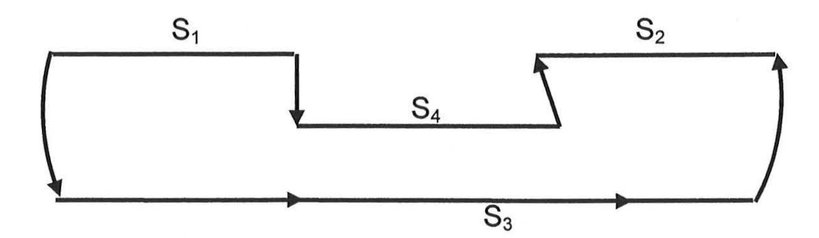



Fig. 8.6. Filtración bajo un macizo impermeable. Representación físico-matemática.

*c) Red de corriente.*

En la Fig. 8.7. se representa esquemáticamente la red de corriente

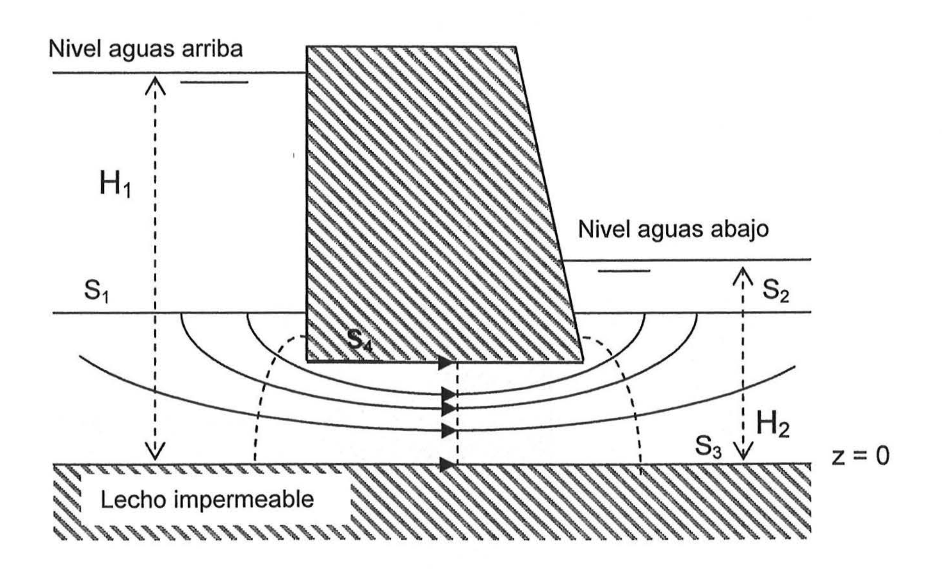



Fig. 8.7. Filtración bajo un macizo impermeable. Red de corriente.

## 8.4. Pozo artesiano

*a) Recinto permeable en permeación.*

Flujo confinado entre dos estratos impermeables, de modo que la extracción de agua se realiza con nivel de agua por encima del techo del estrato permeable: todo el lecho permeable está en permeación.

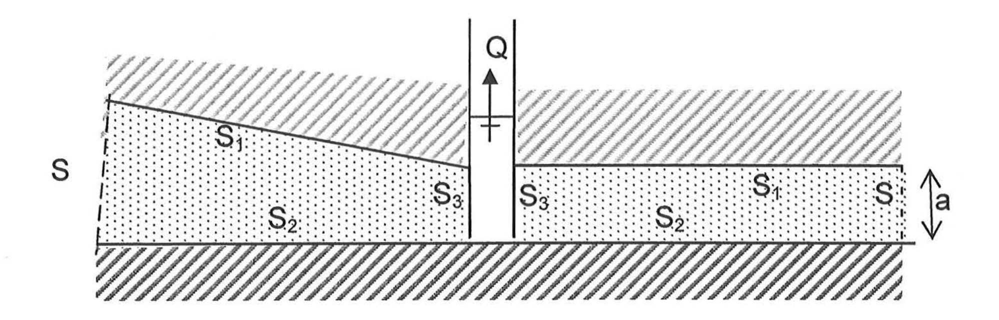



Fig. 8.8. Pozo artesiano. Descripción esquemática

*b) Condiciones de contorno.*

$S_1$ y $S_2$ son superficies impermeables:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

$S_3$ (pared del pozo) es superficie filtrante:

$$h = H_p = cte = altura\ de\ agua\ en\ el\ pozo$$

*S*: Superficie alejada por la que se alimenta de agua del acuífero

*c) Red de corriente.*

En la Fig. 8.9. se representa esquemáticamente la red de corriente del problema

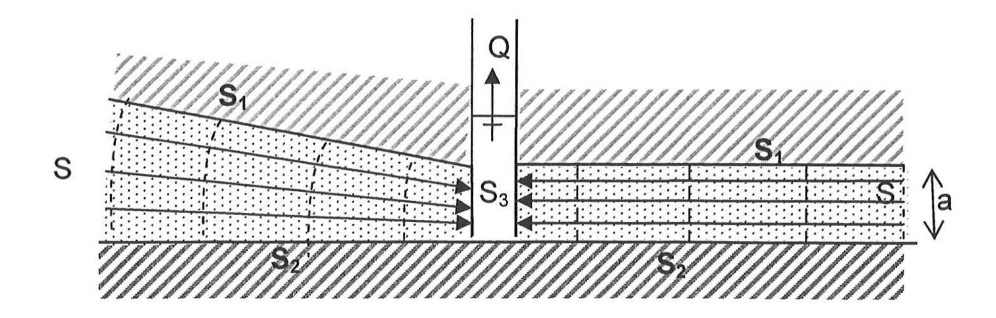



Fig. 8.9. Pozo artesiano. Red de corriente sobre sección vertical.

# 9. FLUJOS CON SUPERFICIE LIBRE

## 9.1. Introducción general

Lo más singular de la Hidráulica del medio permeable de Darcy, respecto de las restantes teorías físicas de transporte de tipo Fourier (como la teoría analítica de la conducción del calor de Fourier, la conducción eléctrica en medio continuo de Ohm o la teoría de la difusión de Fick) es la existencia de superficies libres.

El agua, considerándola como el fluido más importante para el estudio de la filtración, no tiene necesariamente que inundar todo el recinto permeable; el calor fluye por todo su recinto, los electrones por todo el conductor, las partículas por todo el medio.

## 9.2. Muro permeable

En la Fig. 9.1. se representa la sección de un muro o dique permeable asentado sobre un lecho impermeable.

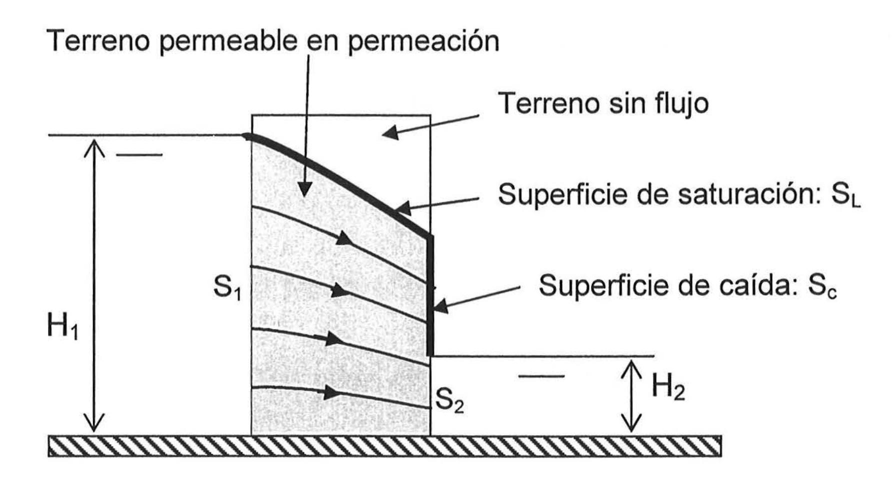



Fig. 9.1. Muro permeable

donde se representan las siguientes superficies:

**$S_1$** : superficie filtrante de entrada
**$S_2$** : superficie filtrante de salida
**$S_L$** : superficie libre o superficie de saturación
**Sc** : superficie de caída

así como unas líneas de flujo o de corriente en la sección vertical del dibujo.

## 9.3. Presa homogénea de tierra

En la Fig. 9.2. se representa esquemáticamente una presa homogénea de tierra, construida con el mismo material del lecho que descansa sobre un estrato impermeable.

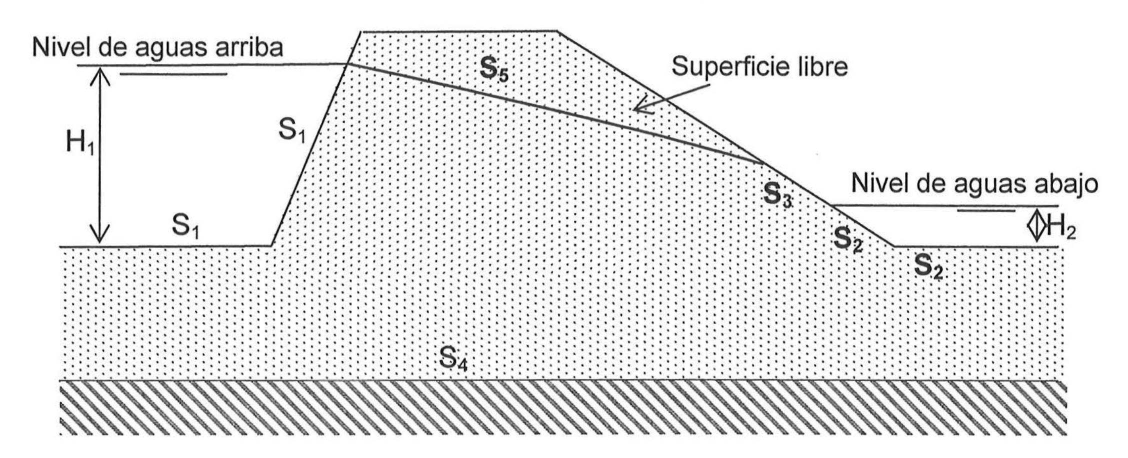



Fig. 9.2. Presa homogénea de tierra.

Las superficies $S_1$ y $S_2$ son filtrantes, $h_1 = H_1$ , $h_2 = H_2$, respectivamente.

$S_3$ es una superficie de escorrentía. Todos sus puntos se consideran en contacto con la atmósfera; tomando, por convenio, el valor de la presión atmosférica p = 0 (presiones manométricas), resulta como condición de contorno:

$$h = \frac{p}{\gamma} + z \Rightarrow h = z$$

Para cada punto de ese contorno definido geométricamente como la superficie comprendida entre la línea de surgencia y el nivel de agua en el paramento.

$S_4$ es un estrato impermeable; no hay flujo a su través y, por tanto: $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$

$S_5$ Superficie libre no conocida a priori. Para su localización se parte de la doble condición que debe cumplir: no hay flujo a través de ella (despreciando los fenómenos de capilaridad), por tanto:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0$$

y, además, cada uno de sus puntos tiene un potencial $h = z$, cota geométrica correspondiente, por estar en contacto (hipótesis) con la atmósfera. Una vez determinada esta superficie libre se considera matemáticamente como si fuera superficie impermeable.

## 9.4. Pozo no artesiano

En la Fig. 9.3. se representa esquemáticamente un pozo no artesiano (que tiene superficie libre) del que se extrae un caudal Q en régimen permanente.

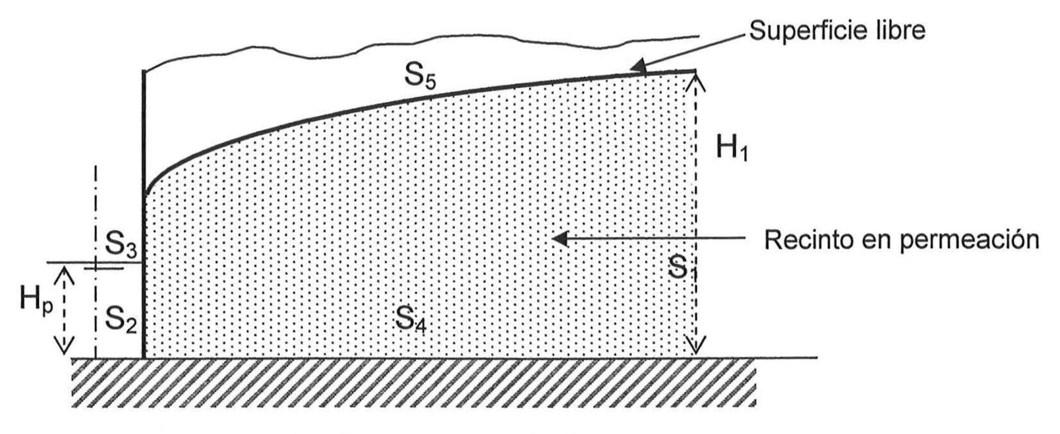



Fig. 9.3. Pozo no artesiano

Existen los mismos tipos de superficies que en el ejemplo anterior. De aquí que una vez determinada o conocida la forma y situación de la superficie libre está delimitado el recinto y se conocen las condiciones de contorno.

# 10. DRENAJES

Colocar un dren en un terreno permeable implica introducir en éste una superficie drenante; es decir, un recinto muy permeable respecto del propio terreno.

## 10.1. Drenaje aguas abajo de una presa homogénea de tierra

Se considera el caso de una presa homogénea de tierra (apartado 9.3 del tema anterior). Con objeto de evitar la superficie de escorrentía (de caída) que pone en peligro el paramento de aguas abajo, puede disponerse, por ejemplo, un colchón drenante cuyo efecto consiste en resituar la línea de saturación como –de forma ampliada- se representa en la Fig. 10.1:

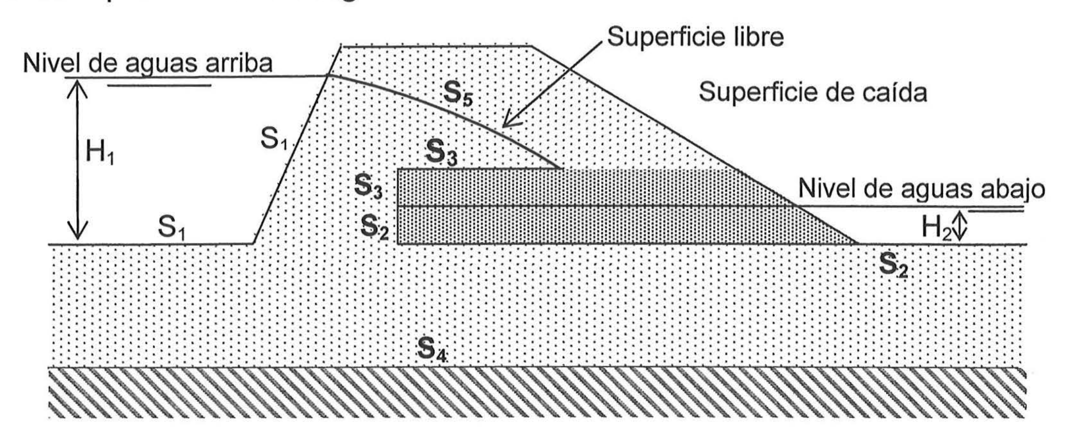



Fig. 10.1. Colchón drenante

## 10.2. Campos de deportes de hierba

En la Fig. 10.2. se representa un detalle de una sección de drenaje de un terreno de instalaciones deportivas.

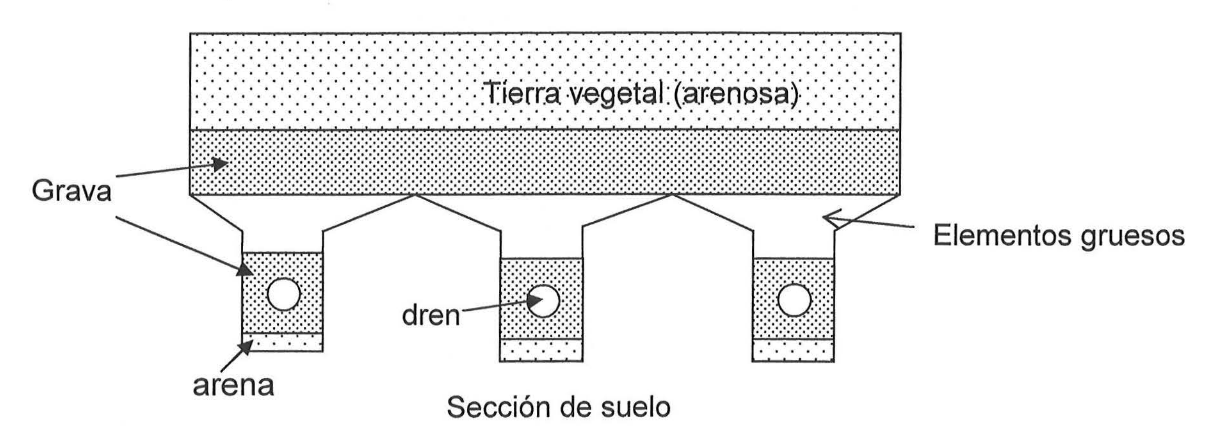



Fig. 10.2. Césped de un campo de deportes

La base de grava es absolutamente permeable respecto de la tierra vegetal arenosa, muy permeable, resistente y de calidad vegetal para césped. Es decir, bajo la capa activa en la permeación, la tierra vegetal arenosa, existe una superficie de caída, goteo, del agua filtrada.

El recinto permeable objeto del problema es exclusivamente la tierra vegetal, que está todo él en permeación desde que comienza el goteo hacia la grava hasta que ha desaparecido el colchón de agua sobre el césped.

El problema se reduce a obtener la capacidad de desagüe del terreno en función de la altura

$$v = k\frac{[H(t)]}{e}$$

donde ***H(t)*** es la altura de agua sobre la base de la tierra vegetal, $z = 0$ considerado, y **e** es el espesor de dicha capa, como se representa en la Fig.10.3.

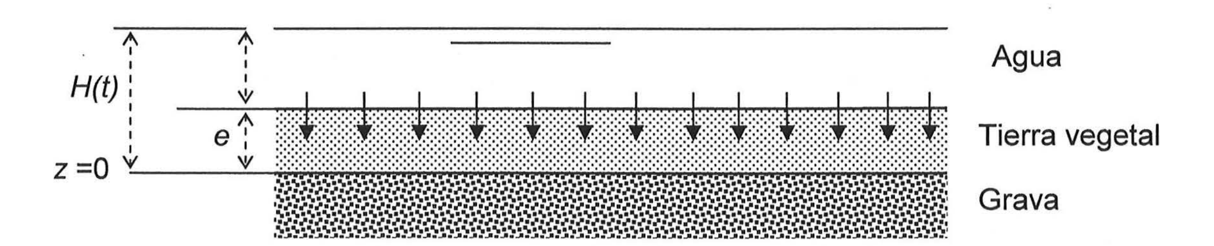



Fig. 10.3. Filtración en un campo de deportes.

El caudal de desagüe del campo se obtiene de $Q = v \cdot S$, siendo $S$ la superficie del campo.

El problema físico-matemático se reduce a la resolución de un problema de potencial sobre dos planos paralelos, como se indica en la Fig. 10.4.

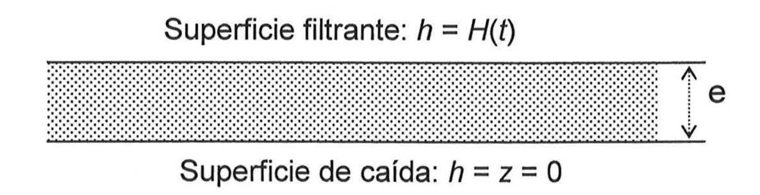



Fig. 10.4. Problema físico-matemático.

# NOTAS

# NOTAS

**CUADERNO**

388.01

Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

